Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **2 heures**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité du blé et étude de la farine La Romaine (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2023/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l’eau d’un spa

Après avoir chauffé l’eau d’un spa à 38 °C, on coupe son alimentation électrique et on modélise le refroidissement par une fonction vérifiant une équation différentielle, dans une ambiance extérieure constante de 25 °C. L’étude porte sur la résolution du modèle, ses variations et sa limite, puis sur une alarme et un algorithme de suivi horaire.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

On résout d’abord l’équation homogène :
$y' = -0{,}05y$, donc $\frac{y'}{y} = -0{,}05$ lorsque $y \neq 0$. En intégrant, on obtient $\ln|y| = -0{,}05t + k$, où k est une constante. Après exponentiation, les solutions s’écrivent sous la forme $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. La solution nulle est également comprise pour $C = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer, sur l’intervalle [0 ; +∞[, une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 1,25.

Pour chercher une solution constante, posons $y(t) = k$. Sa dérivée est nulle, donc l’équation $y' + 0{,}05y = 1{,}25$ devient $0{,}05k = 1{,}25$. On divise par $0{,}05$: $k = 1{,}25/0{,}05 = 25$. Cette valeur vérifie bien l’équation pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. Déduire les solutions de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 1,25.

La différence entre deux solutions de l’équation avec second membre satisfait l’équation homogène. Toute solution de $y' + 0{,}05y = 1{,}25$ est donc la somme d’une solution particulière constante, trouvée à la question précédente, et d’une solution de l’équation homogène. En réunissant ces deux résultats, on obtient la famille complète des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de l’intervalle [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

La fonction f appartient à la famille des solutions déterminée précédemment : $f(t) = Ce^{-0{,}05t} + 25$. On utilise la condition initiale donnée dans le sujet, $f(0) = 38$. Comme $e^0 = 1$, on a $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. Le remplacement de la constante par cette valeur établit l’expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Le temps est exprimé en heures, donc on évalue le modèle en $t = 24$: $f(24) = 13e^{-0{,}05\times 24} + 25 \approx 28{,}9155$. À un chiffre après la virgule, la température est donc de $28{,}9\ ^\circ\text{C}$. Cette valeur correspond à la température de l'eau du spa 24 heures après la coupure de l'alimentation électrique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 h, la température de l'eau est d'environ $28{,}9\ ^\circ\text{C}$.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout réel t de l'intervalle [0 ; +∞[.

On dérive $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle composée, la dérivée de $e^{-0{,}05t}$ est $-0{,}05e^{-0{,}05t}$. Le terme constant a une dérivée nulle. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, la dérivée est le produit de 13 par $-0{,}05e^{-0{,}05t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[. Indiquer si ce sens de variation paraît cohérent avec le contexte et argumenter.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0{,}05t}$ est strictement positive. Comme son coefficient dans $f'(t) = -0{,}65e^{-0{,}05t}$ est négatif, on a $f'(t) < 0$ sur l'intervalle étudié. La fonction f est donc strictement décroissante. C'est cohérent avec le contexte : une fois le chauffage coupé, l'eau se refroidit dans une ambiance à $25\ ^\circ\text{C}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de la fonction f en +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0{,}05t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0{,}05t}$ tend vers 0. Dans l'expression $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$, le terme exponentiel tend donc vers 0, tandis que le terme constant reste égal à 25. La limite de la fonction est ainsi déterminée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

La limite de la température modélisée est $25\ ^\circ\mathrm{C}$, qui est précisément la température ambiante extérieure donnée dans le sujet. Cela signifie que, lorsque le temps écoulé devient très grand, la température de l'eau se rapproche de celle de l'air. Dans ce modèle, elle ne rejoint pas exactement cette valeur à un instant fini : elle tend vers $25\ ^\circ\mathrm{C}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, la température de l'eau se rapproche de la température ambiante : $25\ ^\circ\mathrm{C}$.

Question 4. a). L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé depuis la coupure avant que l'alarme retentisse. Donner la valeur exacte de cette durée, puis sa valeur arrondie à la minute.

On cherche d'abord le moment où l'eau atteint $36\ ^\circ\mathrm{C}$: $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$, puis $t = 20\ln(13/11)$ heures. En minutes, cela représente environ $200{,}465$ minutes, soit 200 minutes à la minute près. Comme l'alarme se déclenche lorsque la température devient strictement inférieure à 36 °C, elle sonne juste après cet instant seuil.

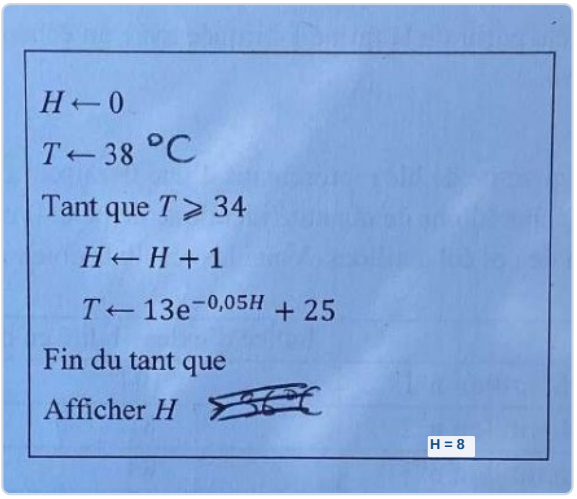
✓ RÉPONSE À RETENIR

Instant seuil : $20\ln(13/11)$ h, soit environ 200 min (3 h 20 min).

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme fourni, qui augmente H d'une heure et calcule T = 13e^(-0,05H) + 25 tant que T ≥ 34.

L'algorithme augmente H d'une unité avant de calculer la nouvelle température. À $H = 7$, on obtient $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34{,}161$, donc la condition $T \geq 34$ reste vraie. À $H = 8$, la température calculée vaut environ $33{,}715$, ce qui met fin à la boucle. L'algorithme affiche alors la valeur de H.

Valeur affichée par l'algorithme



✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeur affichée : $H = 8$.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'évolution de la température de l'eau du spa.

L'algorithme augmente le temps par pas d'une heure et s'arrête dès que la température calculée devient strictement inférieure à $34\ ^\circ\mathrm{C}$. Il donne donc la première heure entière à laquelle le modèle prévoit que l'eau est passée sous ce seuil. Il ne fournit pas l'instant exact du franchissement entre deux heures : cet instant est seulement encadré par les calculs successifs.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Il détermine la première heure entière où la température passe sous $34\ ^\circ\mathrm{C}$: 8 h.

2. Contrôle qualité du blé et étude de la farine La Romaine

Une minoterie contrôle l'extensibilité d'une pâte et le taux d'humidité de livraisons de blé, puis étudie le poids des sacs de farine à l'aide d'une loi normale et d'une représentation graphique. Les données sur les clients boulangers servent à calculer des probabilités conditionnelles et à modéliser par une loi binomiale le nombre de clients testant une nouvelle farine.

Partie A

Question 1. a). À partir des indices d'extensibilité mesurés sur les cinq échantillons, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est $\bar{x} = (104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5 = 76$ mm. L'écart-type de la série, calculé avec le diviseur 5, vaut $\sqrt{[(104-76)^2 + (81-76)^2 + (83-76)^2 + (57-76)^2 + (55-76)^2]/5} = \sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En considérant que l'écart-type de la série est σ = 18 mm, vérifier que le technicien n'a pas besoin de procéder à un test sur cinq nouveaux échantillons. Le processus qualité exige ce test si l'une des cinq valeurs est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ].

Borne	Calcul	Valeur
Inférieure	$76 - 2 \times 18$	40 mm
Supérieure	$76 + 2 \times 18$	112 mm

Les cinq mesures, comprises entre 55 mm et 104 mm, appartiennent à l'intervalle $[40 ; 112]$. Aucun nouveau test n'est nécessaire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle : [40 ; 112] mm. Aucun nouveau test nécessaire.

Question 2. Un camion contient 29 540 kg de blé à 12,4 % d'humidité et l'autre 14 540 kg à 14,1 %. Sachant que le cahier des charges exige un taux d'humidité inférieur à 13 % dans un silo, montrer que le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans le même silo vide.

Le taux du mélange est une moyenne pondérée par les masses. La masse totale vaut $29\,540 + 14\,540 = 44\,080$ kg et la masse d'eau est $29\,540 \times 0,124 + 14\,540 \times 0,141 = 5\,713,1$ kg. Le taux obtenu est $5\,713,1 / 44\,080 \times 100 \approx 12,961\,\%$, donc inférieur à 13 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux d'humidité du mélange : environ 12,961 %. Déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. La variable aléatoire X, qui associe à chaque sac de farine son poids en kilogrammes, suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Un sac ne peut pas être vendu si sa masse est inférieure à 25 kg. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'un sac choisi au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On standardise la variable : $Z = (X - 25,2)/0,1$. Pour la valeur 25 kg, $z = (25 - 25,2)/0,1 = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0,0228$, soit 0,023 au millième près.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2. a). Donner un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^-2 près.

Pour une loi normale, environ 95 % des valeurs se trouvent dans l'intervalle centré sur la moyenne de rayon $1,96\sigma$. Ici, $h = 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg, soit 0,20 kg au centième près.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $h \approx 0,20$ kg.

Question 2. b). À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi cette représentation ne peut pas être celle de la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La loi de X a un écart-type de seulement 0,1 kg. Environ 95 % des masses doivent donc se trouver entre $25,2 - 1,96 \times 0,1 = 25,004$ kg et $25,2 + 1,96 \times 0,1 = 25,396$ kg. Or la courbe fournie est très étalée sur l'axe des masses : sa dispersion est incompatible avec celle de X.

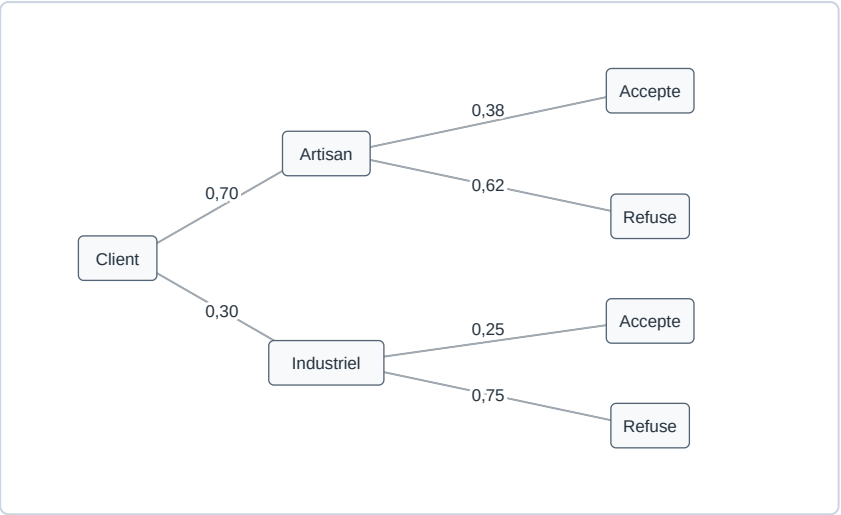
> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> La courbe est trop étalée : environ 95 % des masses devraient être entre 25,004 kg et 25,396 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré : 70 % des clients sont des artisans boulangers, 38 % des artisans acceptent de tester la farine La Romaine et 25 % des boulangers industriels l'acceptent.

Les probabilités complémentaires de refus sont $1 - 0,38 = 0,62$ chez les artisans et $1 - 0,25 = 0,75$ chez les boulangers industriels. L'arbre indique les probabilités des deux catégories puis celles d'accepter ou de refuser le test.

Arbre pondéré des clients et du test de La Romaine



Les branches issues de chaque catégorie ont des probabilités dont la somme vaut 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré complété ci-dessous.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi au hasard soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

La probabilité que le client soit artisan et accepte le test est le produit de la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter : $P(A \cap T) = P(A)P(T \mid A) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité que le client choisi accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

Les artisans qui acceptent représentent $0,70 \times 0,38 = 0,266$ des clients. Les boulangers industriels qui acceptent représentent $(1 - 0,70) \times 0,25 = 0,075$. En additionnant ces deux cas, on obtient $P(T) = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,341$.

Question 3. Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^-3 près, la probabilité que ce soit un artisan boulanger.

Par la formule des probabilités conditionnelles, $P(A \mid T) = P(A \cap T)/P(T)$. Donc $P(A \mid T) = 0,266/0,341 \approx 0,780$ au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0,780$.

Question 4. a). La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^-3 près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.

« Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$. Pour $Y \sim \mathcal{B}(200; 0,341)$, on calcule $P(Y \leq 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{200}{k} (0,341)^k (0,659)^{200-k}$, ce qui donne environ 0,125 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

L'espérance d'une loi binomiale vaut $E(Y) = np$. Ainsi, $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur un grand nombre d'échantillons de 200 clients, environ 68 clients par échantillon auront testé la farine La Romaine en moyenne.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients en moyenne.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRD1, dure deux heures. L'exercice 1 modélise le refroidissement de l'eau d'un spa par une équation différentielle et étudie une alarme. L'exercice 2 traite de contrôles qualité en minoterie, de statistiques, des lois normale et binomiale et de probabilités conditionnelles appliquées à la farine La Romaine.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Pour un mélange, le taux d'humidité se calcule en pondérant chaque taux par la masse de blé correspondante.
- Une densité de probabilité est positive et l'aire totale sous sa courbe vaut 1.
- Si Y suit une loi binomiale B(n,p), alors son espérance est E(Y) = np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer le temps t en heures et la température f(t) en degrés Celsius, puis interpréter les résultats dans leur contexte.
- Pour le test qualité, comparer chaque mesure à l'intervalle défini avec la moyenne et l'écart-type indiqués.
- Pour le mélange des camions, calculer un taux moyen pondéré par les masses, et non la moyenne simple des pourcentages.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer les probabilités conditionnelles des probabilités d'intersection et respecter les arrondis demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle du spa ?

On résout d'abord l'équation homogène y' + 0,05y = 0, puis on cherche une solution particulière constante de l'équation complète. On additionne ces solutions et on utilise la condition initiale f(0) = 38.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux livraisons ?

Multipliez la masse de chaque livraison par son taux d'humidité pour obtenir la masse d'eau correspondante. Additionnez ces masses d'eau, puis divisez par la masse totale de blé. Comparez le taux obtenu à la limite de 13 %.

Q : Comment organiser le temps et que sait-on du barème ?

L'épreuve dure deux heures et l'exercice 2 est noté sur 10 points. Le détail du barème par question n'apparaît pas dans les pages disponibles. Répartissez le temps entre les exercices et réservez quelques minutes aux vérifications.

Q : Quelles précisions d'arrondi faut-il respecter ?

Suivez chaque consigne : écart-type au centième, h à 10^-2 et probabilités concernées à 10^-3. Pour f(24), l'arrondi demandé est au dixième. Gardez les valeurs intermédiaires non arrondies autant que possible.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2023/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS EuroPlastics et Composites : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.