Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) **Page 3**

2. **Développement en série de Fourier d’une fonction périodique paire** (10 questions) **Page 7**

3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2023/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f exprimée en centimètres, le temps étant exprimé en secondes. L’exercice porte sur la résolution d’une équation différentielle, l’étude de la fonction obtenue, la détermination du temps de fermeture et le calcul d’une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Le trinôme se factorise en $(r+1)(r+4)$. En annulant chacun des facteurs, on obtient les deux solutions réelles distinctes.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle (E₀) : y’’ + 5y’ + 4y = 0, en utilisant le tableau fourni.

L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes : -1 et -4. D’après le tableau fourni, la solution générale de l’équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale où le point M est à 20 cm du point O et se déplace vers O à la vitesse négative de 10 cm·s⁻¹, déduire f(0) et f’(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. À l’instant initial, cette distance vaut 20 cm. Sa dérivée représente la vitesse de variation de cette distance : elle est négative puisque le tiroir se rapproche du point O.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20 \text{ cm}$ et $f'(0) = -10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Question 2.b. Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans la fonction donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. Cette expression exacte donne la distance OM en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme qu'il est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, donc $f(4) < 0,5$. Comme $f(0) = 20$ cm et que f est continue, elle atteint le seuil de 0,5 cm entre 0 et 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Partie B

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée pour e^{-u}, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers zéro. Chacun des deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ tend donc vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à zéro. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'ordonnée nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme avec la formule $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et le signe négatif du second terme se combine avec la dérivée de e^{-4t}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de f(t) arrondies au 10^{-2} et la valeur de vérité de la condition à chaque étape.

L'algorithme teste si $f(t) > 0,5$, puis augmente t de 0,1 s tant que la condition est vraie. Les arrondis sont au centième ; la condition est évaluée à partir des valeurs non arrondies.

Ligne	t	$f(t)$**, au** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arrêt à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3,8$, on a $f(t) > 0,5$, donc l'algorithme poursuit. À $t = 3,9$, $f(t) < 0,5$: la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête. Le tiroir est alors fermé selon le critère donné.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9\ \text{s}$: le tiroir est fermé avant 4 s.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \dfrac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{45}{2} - \dfrac{70}{3}e^{-4} + \dfrac{5}{6}e^{-16}\right)$. On distribue le facteur $\dfrac{1}{4}$ pour obtenir l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}\ \text{cm}.$

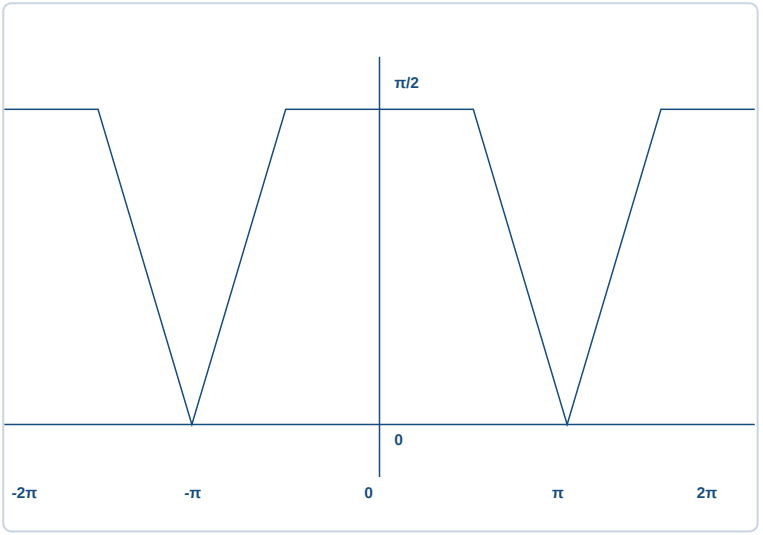
2. Développement en série de Fourier d'une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire de période 2π, constante sur [0 ; π/2[puis définie par π − t sur [π/2 ; π]. Les questions mobilisent le tracé de la fonction, les coefficients de Fourier et une somme partielle, avant d'identifier une courbe et d'estimer l'erreur d'une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition et de sa périodicité.

Sur une période centrée en 0, la fonction vaut $\pi/2$ sur $[-\pi/2;\pi/2]$, puis rejoint 0 linéairement en $-\pi$ et π. La périodicité de période 2π répète ce motif sur $[-2\pi;2\pi]$. Le tracé indique les valeurs aux points remarquables et les segments reliant ces points.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé pair et périodique : plateaux à $\pi/2$, zéros en $-\pi$ et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Sur une période, on peut écrire $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f est paire, tandis que $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période vaut $T = 2\pi$. La pulsation associée est donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{unité de temps}^{-1}$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant a_0 est égal à $3\pi/8$.

Sur $[0;\pi]$, l'aire sous la courbe est celle d'un rectangle et d'un triangle : $\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{8}$. Sur une période, l'aire est doublée car f est paire. Ainsi, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \frac{3\pi^2}{8} = \frac{3\pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare ensuite l'intégrale à $t = \pi/2$, où change l'expression de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En utilisant l'expression admise $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On utilise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$ et $n = 3$, les cosinus valent respectivement 0 et -1. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle s'écrit $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Comme $b_n = 0$, on remplace les coefficients par les valeurs obtenues aux questions précédentes.

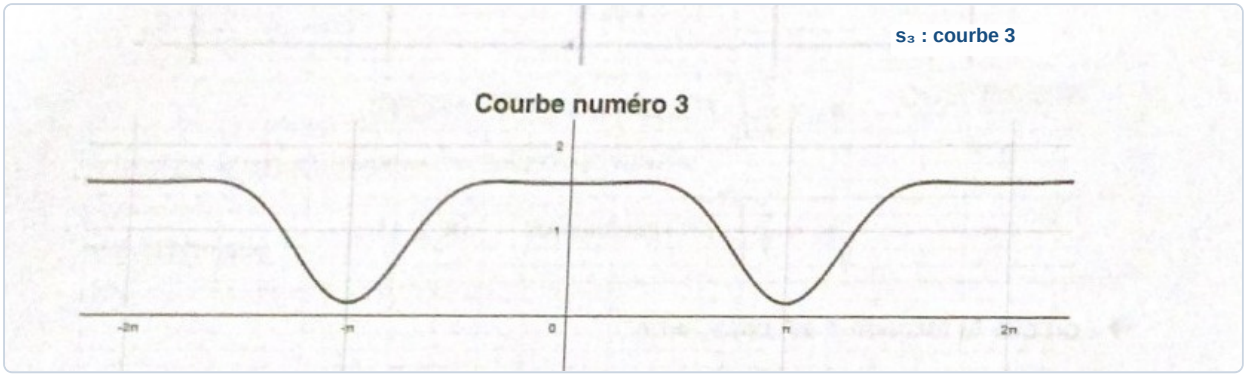
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La courbe de s_3 est périodique, lisse, élevée autour de $t = 0$ et présente un creux autour de $t = \pm\pi$. Cela correspond à la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En remplaçant les coefficients, $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. On arrondit le résultat à 10^{-4} près.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **Sachant que F est la valeur efficace de f, que $F^2 = \pi^2/6$ et que P approche F^2, choisir le pourcentage d'erreur de cette approximation parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

L'erreur relative vaut $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, elle est d'environ $0{,}074\%$. La proposition la plus proche est $0{,}1\%$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$0{,}1\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10, étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et une fonction périodique paire par série de Fourier, avec calculs, interprétation et lecture graphique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de l'équation caractéristique déterminent les exponentielles de la solution générale.
- La limite de f en $+\infty$ donne l'équation de l'asymptote horizontale ; le signe de f' détermine les variations.
- Pour une fonction paire, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.
- L'erreur relative de l'approximation P de F^2 se calcule en comparant $|P - F^2|$ à F^2, puis en exprimant le rapport en pourcentage.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer f(0), exprimé en centimètres, de f'(0), exprimé en centimètres par seconde.
- Dans le tableau de l'algorithme, avancer par pas de 0,1 et tester la condition avec la valeur exacte de f(t), non avec son arrondi.
- Pour le tracé de Fourier, respecter la définition par morceaux, la parité et la période 2π.
- Pour l'erreur en pourcentage, utiliser F^2 comme valeur de référence et choisir une seule réponse au QCM.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la première partie ?

Résolvez d'abord $r^2 + 5r + 4 = 0$. Les deux racines réelles distinctes donnent la forme générale de la solution avec deux exponentielles. Les valeurs de f(0) et f'(0) permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est une fonction impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur une période symétrique est nulle. Ainsi, tous les coefficients associés aux sinus vérifient $b_n = 0$.

Q : Comment traiter le tableau de l'algorithme et répartir son temps ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Pour l'algorithme, augmentez t de 0,1 à chaque passage, calculez f(t) et vérifiez la condition jusqu'à ce qu'elle devienne fausse.

Q : Quel coefficient faut-il retenir pour cette épreuve ?

Le coefficient dépend de la spécialité : il est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Ces deux valeurs sont indiquées dans le tableau de la page de garde.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2023/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS EuroPlastics et Composites : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.