Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation de la vitesse d'un chariot pendant son freinage** (12 questions) **Page 3**

2. **Étude d'un système électrique par transformées de Laplace** (9 questions) **Page 6**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 9**

Sujet officiel (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2022/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine avance à 20 m·s⁻¹ au début de son freinage. Sa vitesse est étudiée au moyen d'une équation différentielle, d'une étude de fonction et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour l'équation homogène $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$, donc on prend k réel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui vérifie l'équation (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de (E).

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière, $g(t) = 5$, aux solutions de l'équation homogène associée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = k + 5 = 20$, donc $k = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite vaut 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	5, limite

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout temps fini $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans jamais atteindre zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4. a. **Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$.

Question 4. b. **Calculer la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ à l'aide de l'intégrale de f. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75)$. La distance exacte est donc $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \text{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir la réponse exacte parmi les propositions donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le développement limité à l'ordre 2 ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d'un système électrique par transformées de Laplace

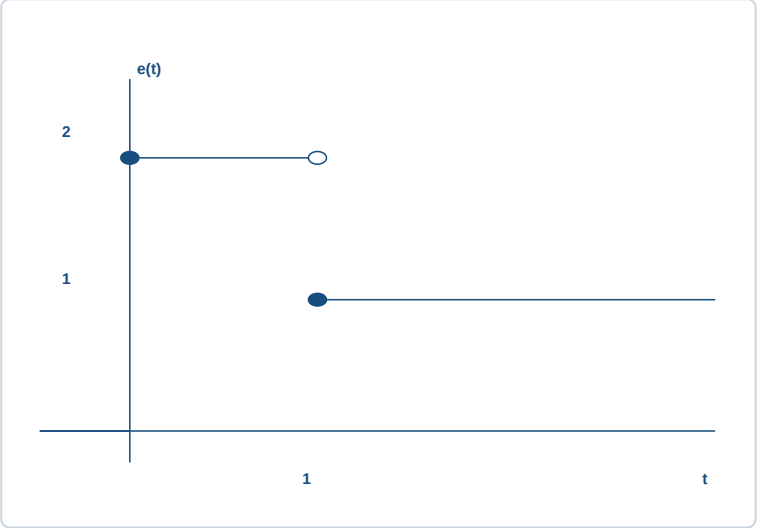
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de représenter le signal d'entrée et de déterminer puis représenter le signal de sortie à l'aide des transformées de Laplace.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal est causal, il vaut 0 pour $t < 0$. À partir de $t = 0$, il vaut 2 jusqu'à $t = 1$ exclu, puis 1 dès $t = 1$. Le point de niveau 2 en $t = 1$ est ouvert et celui de niveau 1 est fermé.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ pour $t < 0$, $e(t) = 2$ sur $[0; 1[$, puis $e(t) = 1$ pour $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformée de $U(t)$ est $1/p$, et celle de $U(t-1)$ est e^{-p}/p. Par linéarité, la transformée de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$ est donc $2/p - e^{-p}/p$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$. En remplaçant $H(p)$ par $1/(p+1)$ et $E(p)$ par $(2 - e^{-p})/p$, puis en distribuant, on obtient l'expression demandée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

En réduisant le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$, son numérateur vaut $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1).

Les deux dernières transformées inverses s'obtiennent par décalage d'une unité : le facteur e^{-p} retarde le signal, qui est alors nul avant $t = 1$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$, $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

Par décomposition en éléments simples, $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Pour $0 \leq t < 1$, les termes retardés sont nuls puisque $U(t-1) = 0$. Il reste donc l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. **Sachant que s(t) = (e − 2)e^{-t} + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1). Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

En évaluant la formule donnée en $t = 1$, on obtient $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Numériquement, cette valeur est arrondie au dixième.

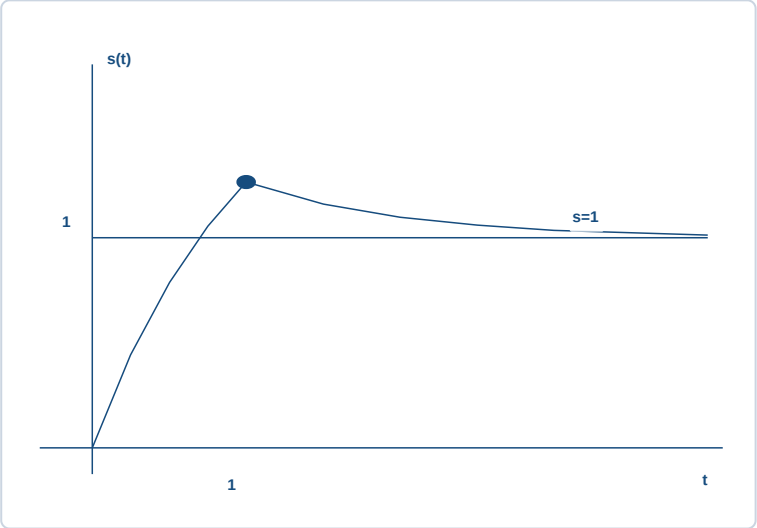
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5. b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $2(1-e^{-t})$ et croît jusqu'à $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $(e-2)e^{-t}+1$, décroît et tend vers 1. Les deux expressions coïncident en $t = 1$.

Courbe représentative du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe part de $(0;0)$, atteint $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5. c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, le terme $(e-2)e^{-t}$ tend vers 0. La limite de $s(t) = (e-2)e^{-t}+1$ est donc 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, étude de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière donne la solution générale de l'équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers une limite finie L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{[t_0,t_1]} f(t)\,dt$.
- Un retard d'une unité dans le temps correspond au facteur e^{-p} dans la transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir établi la solution générale de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale f(0) = 20.
- Pour les variations, déterminer le signe de f' ; pour conclure sur l'arrêt, comparer la limite de la vitesse à zéro.
- Pour calculer une distance, évaluer une primitive aux deux bornes et respecter l'unité et l'arrondi demandés.
- Dans l'exercice de Laplace, tenir compte du facteur de retard e^{-p} et distinguer les expressions sur [0 ; 1[et [1 ; +∞[.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle avec la vitesse initiale ?

On ajoute à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène. On obtient une constante, puis on utilise t = 0 et f(0) = 20 pour la déterminer.

Q : Comment savoir si le chariot finit par s'arrêter selon le modèle ?

On étudie la limite de la vitesse lorsque le temps tend vers +∞. Ici, elle tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ et non vers zéro ; selon le modèle, le chariot ne s'arrête donc pas.

Q : Combien de points vaut chaque exercice et combien de temps dure l'épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices valant chacun 10 points, soit 20 points au total. Le sujet autorise une calculatrice en mode examen ou une calculatrice sans mémoire de type collège.

Q : Le sujet précise-t-il les points attribués à chaque question ou des critères détaillés de notation ?

Le sujet indique seulement que chaque exercice vaut 10 points. Il ne donne pas de répartition des points par question ni de grille détaillée de critères de notation.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2022/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS EuroPlastics et Composites : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.