Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités indiquées sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale** (12 questions) **Page 3**

2. **Tubes fluorescents et rivets : probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance** (9 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2022/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m·s⁻¹ et sa vitesse durant le freinage est modélisée par une fonction f du temps. L'exercice étudie cette fonction par équation différentielle, limites, variations, intégration et développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

Le sujet fournit la forme des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$: $y(t) = ke^{-at}$, avec une constante réelle k. Ici, le coefficient de y est $a = 0,8$. On remplace donc a par $0,8$. En dérivant cette expression, on vérifie qu'elle satisfait bien $y' + 0,8y = 0$ sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. En substituant dans le membre de gauche, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui est bien le membre de droite de l'équation.

L'égalité étant vérifiée pour tout t, la fonction proposée est bien une solution de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: g est solution.

Question 1. c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète, comme vérifié précédemment. Toute solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée. Celle-ci est de la forme $ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle. Cette somme donne l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. À l'instant initial, $f(0) = 5 + k$, car $e^0 = 1$. La condition $f(0) = 20$ impose donc $5 + k = 20$, d'où $k = 15$.

On remplace cette constante dans la solution générale pour obtenir la fonction qui vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5, avec f(t) = 15e^(−0,8t) + 5.

Pour $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. On sait alors que $e^{-0,8t} \to 0$, donc $15e^{-0,8t} \to 0$. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme restant est constant et vaut 5. Par somme des limites, la limite de la fonction est égale à cette constante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Une courbe représentative admet une asymptote horizontale en $+\infty$ lorsque la fonction possède une limite finie en $+\infty$. Ici, cette limite vaut 5. La droite asymptote est donc horizontale et son ordonnée constante est égale à cette valeur. La courbe C se rapproche de cette droite lorsque t augmente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de f'(t) = −12e^(−0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5. Le tableau de variation est :

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5, décroissante

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit atteindre zéro. Or, à tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, la vitesse est toujours supérieure à 5 et ne s'annule jamais. Elle se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$ sans l'atteindre : le freinage décrit par ce modèle ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdotp s^{-1}}$.

Question 4. a. Vérifier que F définie par F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$ en utilisant la dérivée d'une exponentielle composée. On obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. Calculer la distance exacte parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ à l'aide de l'intégrale de f, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance parcourue entre 0 et 1 est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$.
2. Avec la primitive donnée, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres.

L'évaluation de cette expression donne environ $15,3251$ m. L'arrondi au centimètre est donc $15,33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le calcul formel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Sur la page, seule la troisième proposition reprend le polynôme et ce reste sous la forme attendue. C'est donc la réponse à choisir.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. De plus, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La droite passe donc par $(0; 20)$ et son coefficient directeur vaut -12. En remplaçant dans l'équation de la tangente, on obtient l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Tubes fluorescents et rivets : probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance

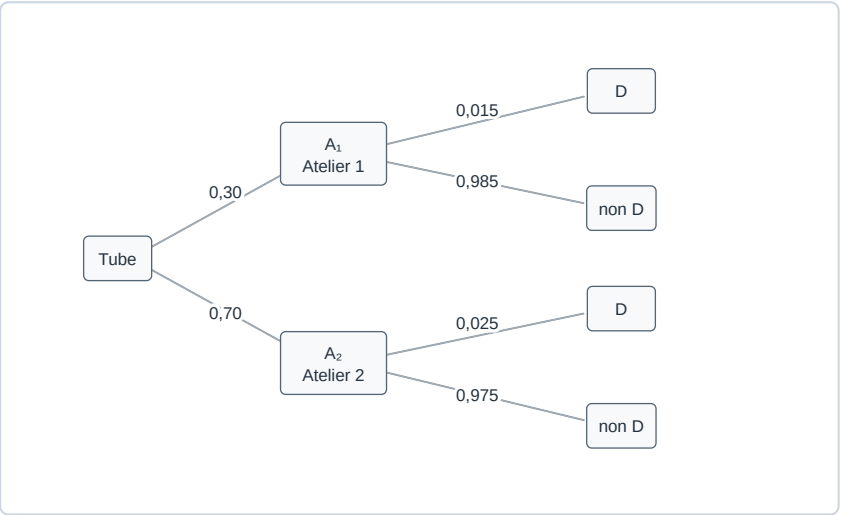
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, dont les parts de production et les taux de défaut sont fournis. L'exercice porte aussi sur la durée de fonctionnement des tubes et sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et la présence ou l'absence d'un défaut.

On sépare d'abord la production selon l'atelier, puis chaque branche selon la présence ou l'absence d'un défaut. Les probabilités des branches issues d'un atelier sont les probabilités conditionnelles.

Production des tubes et défauts



Probabilités indiquées sur chaque branche.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : voir le schéma.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

La probabilité cherchée est le produit de la proportion issue de l'atelier 1 par son taux de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P_{A_1}(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit $0{,}45\,\%$.

Question 3. **Montrer l'égalité P(D) = 0,0195 telle qu'elle est imprimée dans le sujet. Cette valeur paraît incohérente avec les taux de défaut et les proportions de production indiqués.**

La formule des probabilités totales donne $P(D) = P(A_1)P_{A_1}(D) + P(A_2)P_{A_2}(D)$. Ainsi, $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}022$. Les données ne conduisent donc pas à $0{,}0195$: la page porte aussi une correction manuscrite vers $0{,}0220$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, et non $0{,}0195$.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité de provenir de l'atelier 2 et de ne pas avoir de défaut vaut $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité d'absence de défaut est $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Donc $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}6979$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit $69{,}8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page originale donne $\lambda = 0{,}001$ par heure. Pour une loi exponentielle, $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}001} = 1\,000$ heures. Cette valeur représente la durée moyenne de fonctionnement des tubes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : c'est la durée moyenne de fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0{,}001$ et $t = 8\,000$, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9997$. À 10^{-2} près, cela s'arrondit à $1{,}00$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ainsi, $P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut $0{,}00$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir de l'échantillon de 1 000 rivets dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle est la fréquence observée de rivets conformes : $f = \frac{975}{1\,000} = 0{,}975$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}975$, soit $97{,}5\,\%$.

Question 2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %, puis arrondir ses bornes à 10^{-3} près.

Avec la formule fournie, l'intervalle est $f \pm 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$. Pour $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut environ $0{,}009677$, d'où les bornes $0{,}965323$ et $0{,}984677$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\,;\,0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de deux heures. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux où il est 3. Les exercices étudient le freinage d'un chariot, la production et la durée de vie de tubes fluorescents, ainsi que la conformité de rivets, en mobilisant analyse, probabilités et statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt).
- L'intervalle de confiance fourni pour une proportion est f ± 1,96√(f(1−f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution de l'équation homogène de la solution particulière avant de former la solution générale.
- Pour l'arrêt du chariot, examiner la limite de la vitesse et interpréter cette limite dans le contexte.
- Vérifier la cohérence des données de l'arbre : les taux fournis donnent P(D) = 0,022, différent de la valeur 0,0195 imprimée.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et la taille de l'échantillon, puis respecter l'arrondi demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle avec la condition initiale ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Utilisez ensuite f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment savoir si le chariot finit par s'arrêter selon le modèle ?

Étudiez la limite de la vitesse quand le temps tend vers +∞. Un arrêt complet correspondrait à une vitesse tendant vers zéro. Ici, la fonction tend vers 5 m·s⁻¹, donc le modèle ne décrit pas un arrêt.

Q : Combien de points vaut chaque exercice et comment organiser les deux heures ?

Le sujet attribue 10 points à chacun des deux exercices. Répartissez les deux heures entre l'étude du freinage et l'exercice sur les tubes, puis gardez du temps pour justifier les calculs et vérifier les arrondis.

Q : Quelle précaution prendre pour la probabilité de défaut et l'intervalle de confiance ?

Vérifiez les calculs issus de l'arbre : les données donnent une probabilité de défaut différente de la valeur imprimée. Pour l'intervalle, appliquez la formule fournie avec n = 1 000 et arrondissez au millième.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsepc.fr/assets/annales/bts-epc/E2 - Mathématiques/2022/BTS EPC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS EuroPlastics et Composites : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.